自然数から整数の構成
～トランプカードを使用した一つの試み～

安井　義和
畿央大学教育学部現代教育学科（〒635-0832　奈良県北葛城郡広陵町馬見中4-2-2）

Constructing integers from natural numbers -using playing cards-

Yoshikazu YASUI
Department of Education, Faculty of Education, Kio University
（4-2-2 Umami-naka,Koryo-cho,Kitakatsuragi-gun,Nara,635-0832,Japan）

要約　0（零）は実数の加法演算で単位元という重要な存在でありながら小・中・高等学校ではその定義を論理的に学ぶことが極めて少ない。小学校1年生では1、2、3、・・・、9の並びに10を学ぶ。ここで初めて0を学ぶが、学び方としては10でなくとも、9の次は極言すれば＊でも、＃でもいい。そこで本学の「算数学」[1)]なる開講科目で数学的な演算からの観点で自然数から0を論理的に構成し、続いて負の整数を構成する。最後には-(-1)=1、3-(-1)=4などが成り立つことを示した授業実践例である。これら2つの式に4つの「-」があるが、2つ目の式「3-(-1)=4」における「3」の直後の「-」は演算記号で、他の3つの「-」は正負の負の記号である。従って、「3-(-1)=4」を理解する際に「-(-1)=1」を用いて「3-(-1)=3+1」とするのは論理的ではない。本報告では論理的構成の理解をサポートするためにトランプカードを使用してゲーム的に理解することが特徴的である。

Keywords：自然数　整数　演算　トランプカード　天秤ばかり

§ 1　はじめに

小学校での数（カズ）は小学校1年生の算数の第1時に、例えば「ともだち」[2)] で、猿の集まり、（数学的には「集合」という）、キツネの集まり、子豚の集まり、鉛筆の集まりなどを、「なかま」と捉え、1対1で集合間に対応を考えて、1、2、3、…、9を学び、その延長上において第4時で10を学ぶ[2)]。

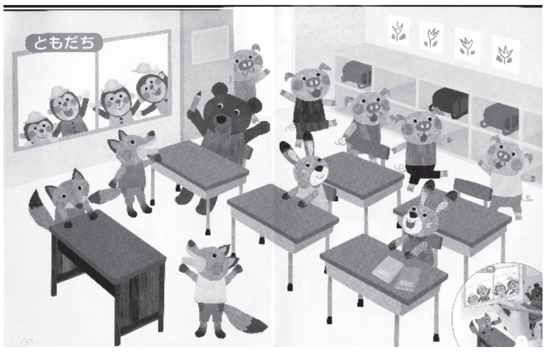

図１ともだち

そして第9時に「0というかず」を扱う[2)]。おにぎり3つがお皿にあり、1つずつ食べていくと残りは2つ、1つとなり、全部食べた場合、0（零）という数字が出てくる[2)]。教師用指導書には「何もない」「１つもない」という意味に用いる[3)] とされている。数字を歴史的にみても、「106」を漢数字で表すと「百六」、「1003」を表すと「千三」と表し、ローマ数字では「106」は「CⅥ」、「1003」は「MⅥ」と表すように、「0」なる値を表す文字が不要である。或いは私たちの身近なところでは、地下2階、地下1階、1階、2階、3階、・・と言う様に「0階」は使っていない、また西暦は紀元前2年、紀元前1年、1年、2年、・・、と「0年」は使わない。これらの様に0（零）は「ものを数える」必要から生まれた経緯からは必ずしも必要ではなかった。日本には17世紀ごろに0が伝わったと言われている[4)]。

0の導入には小学校教科書[2)] では空位としての方法もあるが、本稿は演算（加法）の面から考える。

まず、自然数は1、2、3、… を意味し、自然数の全てからなる集合をℕとする。即ち、ℕ＝{1、2、3、…}である。「aは自然数である」ことは「a ∈ ℕ」と、「aは自然数でない」ことは「a ∉ ℕ」とそれぞれ表す。

自然数の加法を前提に、0及び負の整数の導入をトランプカードを通して試みる。ここでの自然数は集合

２０１７年１０月２日　投稿　　２０１７年１０月２６日　受理

による定義（即ち、集合数）とする[5]。

注意1　以下の定理等の証明においては、一般論では一般学生にとって理解にハードルが高いと判断し、具体的な数値で行った場合が多い。また、式の変更における等号（＝）は本来なら行の先頭にするのが数学では慣例であるが、天秤ばかりを使うので、左の皿か右の皿かを明示するために、左の皿の状況を説明する多くの場合には等号を各行の最後尾に記していることも理解頂きたい。

また、天秤ばかりでの説明書には秋山仁[6] がある。

前提条件 ℕ（＝自然数全体からなる集合）について、
条件1：加法の定義、即ち、自然数m、nについて、自然数m+nは定義されている。
条件2：交換法則：即ち、自然数m、nについてm+n=n+mが成り立つ。
条件3：結合法則：即ち、自然数l、m、nについて（l+m）+n=l+（m+n）が成り立つ。
これら3つを条件とする。

授業を進めるに当たって、ダイレクトに1、2、3、… を使用すると受講生は0の性質とか負の整数の性質は既知なので、1、2、3、… の代わりにスペードの1、スペードの2、スペードの3、… を使った。本稿では、それらを$\boxed{\spadesuit 1}$、$\boxed{\spadesuit 2}$、$\boxed{\spadesuit 3}$、…と略して表す。更に、天秤の左右のバランスが取れているときに、「＝」で示す。そしてどちらかのお皿に例えばカード$\boxed{\spadesuit 1}$、$\boxed{\spadesuit 2}$が載っている状況を$\boxed{\spadesuit 1}\oplus\boxed{\spadesuit 2}$で表す。

更に天秤の左の皿に載ってバランスが取れているときは「＝」の左側、右の皿に載っているときは「＝」の右側に書くとする。例えば、左の皿に$\boxed{\spadesuit 1}$、$\boxed{\spadesuit 2}$が載って、右の皿に$\boxed{\spadesuit 3}$が載っているときに、

$\boxed{\spadesuit 1}\oplus\boxed{\spadesuit 2}=\boxed{\spadesuit 3}$

と書く。

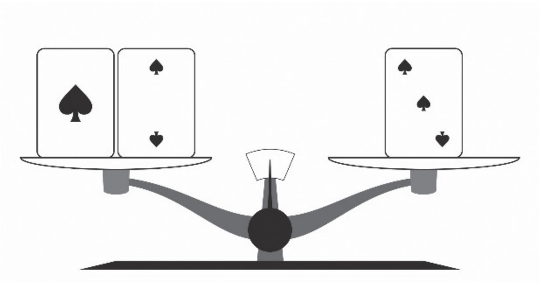

図2 $\boxed{\spadesuit 1}\oplus\boxed{\spadesuit 2}=\boxed{\spadesuit 3}$

他方、左の皿に$\boxed{\spadesuit 1}$、$\boxed{\spadesuit 2}$が載って、右の皿に$\boxed{\spadesuit 4}$が載っているときは左右のバランスが取れないので

$\boxed{\spadesuit 1}\oplus\boxed{\spadesuit 2}\neq\boxed{\spadesuit 4}$

と表す。

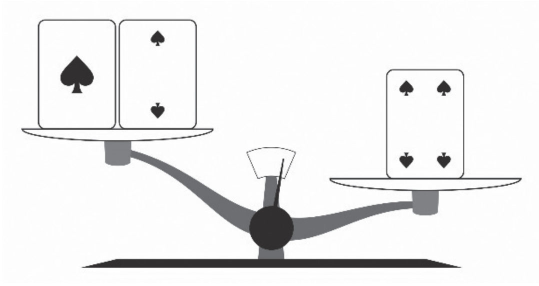

図3 $\boxed{\spadesuit 1}\oplus\boxed{\spadesuit 2}\neq\boxed{\spadesuit 4}$

なお、上記の図3で右下がりとか左下がりとかは特別の意味はなく、左右のバランスが取れていないことを意味している。

また、「$\oplus$」なる記号を用いるのは学生が「＋」だとすでに知っている知識を使うからである。ホントに何かを加える、皿に載っていることである。あくまでも知っているのは自然数と自然数同士の加法のみが前提である。

従って、上記前提条件１～3を言い換えると、自然数l、m、nについて
条件1：$\boxed{\spadesuit m}\oplus\boxed{\spadesuit n}=\boxed{\spadesuit m+n}$
条件2：$\boxed{\spadesuit m}\oplus\boxed{\spadesuit n}=\boxed{\spadesuit n}\oplus\boxed{\spadesuit m}$
条件3：$(\boxed{\spadesuit 1}\oplus\boxed{\spadesuit m})\oplus\boxed{\spadesuit n}$
$=\boxed{\spadesuit 1}\oplus(\boxed{\spadesuit m}\oplus\boxed{\spadesuit n})$

条件1については$\boxed{\spadesuit 4}\oplus\boxed{\spadesuit 3}=\boxed{\spadesuit 7}$などを意味する。

条件２はカードが天秤のどちらかの同じ皿に在る場合、順番は無関係である、即ち、同じ皿の何処に載っているかを問わないことを意味する。

条件３はカードが天秤のどちらかの同じ皿に３つが在る場合には結合は無関係であることを意味する。これも上の「同じ皿の何処に載っていても同じ」内容を意味する。

本稿の目的は0の導入及び0の基本的性質の証明、続いて、負の整数：-1、-2、-3、… の導入及びそれらの基本的性質、例えば「-(-1)=1」であること、或いは「(-1)+(-2)=-(1+2)」であることをトランプを用いて理解することにある。

§2　0（零）$\boxed{J}$の導入（ジョーカー）

まず、自然数全体の集合ℕの加法は既知で、今後は次のルールを定める：

ルール1：天秤の左右の皿にカードが在るとき、<u>左のお皿にのみ</u>何かを加えてバランスが取れる様にする。
ルール2：すでに了解された前提条件1～3は左右のお

皿で成り立っている。
ルール3：左右どちらの皿でも、同じ皿の上では「在る」だけだから交換法則及び結合法則が成り立つ。

注意2
ルール１で、「左のお皿にのみ」の意味するところは「自然数m、nについて、
m+x=n」なるxの方程式を考えているからである。
従ってルール１の重要なことは「左の皿に何かを加える」ことで、「何も加えない」及び「右の皿に」何かを加えることは禁じ手である。
例えば、
(1) 左の皿に♠1 が、右の皿に♠3 が在るとき、♠2を左の皿に加える。
即ち、

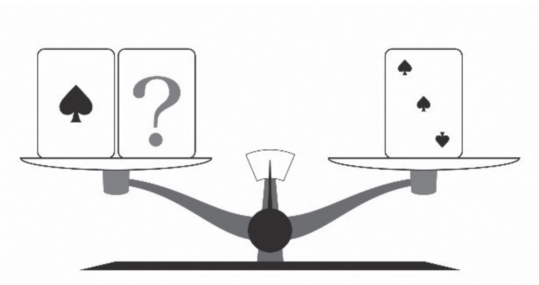

図4 ♠1⊕?=♠3

を満たす ? は♠2を使えばよい。
以降、カードを探すときは「 ? 」カードを記載する。
(2) 左の皿に♠5 が、右の皿に♠9が在るとき、♠4を左の皿に加える。
しかし、左の天秤皿に♠3が、右の天秤皿に♠1が在るとき、右の皿に♠2 を加えるとバランスは保つが、「右の皿に加える」ことは禁じている。
ルール2は、例えば同じ皿の上では
(3) ♠2 は♠1 ⊕ ♠1に置き換えられ、
(4) ♠5 は♠2 ⊕ ♠3に、或いは
♠1 ⊕ ♠1 ⊕ ♠3
などに置き換えられることを意味している。
ルール3の交換法則とは、同じ皿の上ではＡとＢであっても、ＢとＡであっても同じである。同じ皿にＡとかＢが在れば、その皿の上では場所を問わないことを意味している。
ルール3の結合法則とは（ＡとＢ）とＣは、Ａと（ＢとＣ）とは同じであることを意味している。すなわち、同じ皿の上に、ＡとＢとＣとが載っていることを意味している。

課題1. 左の皿に♠1 が、右の皿にも♠1が載っている場合

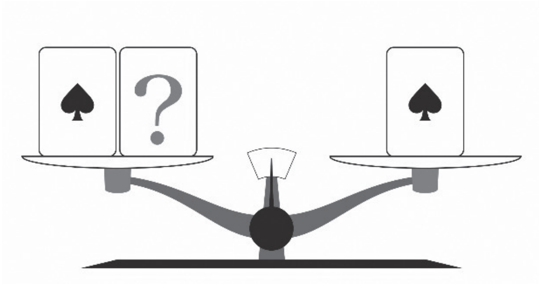

図5 ♠1⊕?=♠1

即ち、♠1⊕ ? ＝♠1のとき、 ? としてどんなカードを加えるか。
この段階では、なにも加えなくても、天秤ばかりはバランスを保っている。しかし、ルール１により、「左に何かを加える」「 ? を探す」「1+x＝1の方程式を解く」ことが必要である。
しかし、既存のカード（自然数全体の集合ℕ)、即ち、♠1、♠2、♠3、… のどれも成り立たない。そこで、新しいカードを作る。授業では、そのカードとしてジョーカーを使用した。ここではJ1を用いる。ここでJ1と「1」を付記するのは♠1の「1」に対して用いるからである。

定義１　新しいカード J1は
♠1⊕J1＝♠1
を満たす役目のカードと定義する。

言い換えると♠1にJ1を加えると♠1とはバランスを保つ。

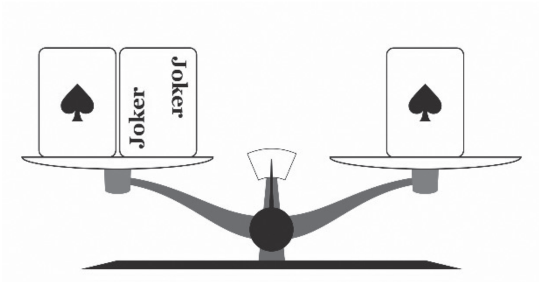

図6 ♠1⊕ J1 =♠1

この段階で、カードは♠1、♠2、♠3、・・・、♠n、… とJ1が存在する。

課題2. 左に♠2 が、右に♠2 が載っている場合、即ち、♠2 ⊕ ? =♠2 のとき、 ? としてどんなカードで成り立つか。

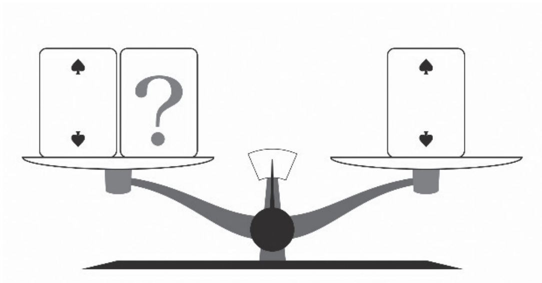

図7 ♠2⊕?=♠2

この段階では、課題１と同じく、なにも加えなくても、天秤ばかりはバランスが取れている。しかし、ルール１により、「左に何かを加える」「？を探す」「2+x=2の方程式を解く」ことが必要である。

実はこのとき、次のことが成り立つ。

定理１　♠2⊕J1=♠2　が成り立つ。

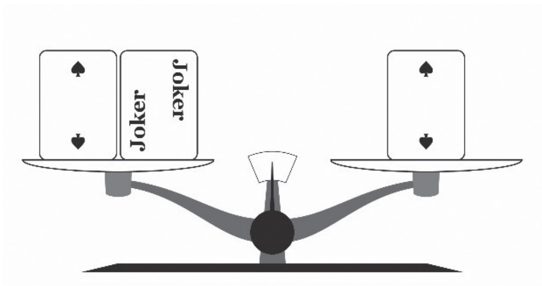

図8 ♠2⊕J1=♠2

証明

♠2⊕J1＝♠2を示すと十分である。

左の皿：♠2⊕J1 ＝

(♠1⊕♠1) ⊕J1＝（∵条件1）

♠1⊕(♠1⊕J1)＝（∵条件3）

♠1⊕♠1＝（∵定義１）

♠2＝　　　　　　　　（∵条件1）

以上より、♠2⊕J1＝♠2が示された。

注意3

上記の式の後に、例えば「(∵条件1)」とあるが、これは直前の内容が条件１より成り立つことを意味する。

同様に、すべての自然数n ∈ ℕについて、♠n⊕J1＝♠nが成り立つことが帰納法で示すことができる。

従って、今後はJ＝J1とおく。

すると：

系１　すべての自然数n ∈ ℕについて、次が成り立つ。

♠n⊕J＝♠n

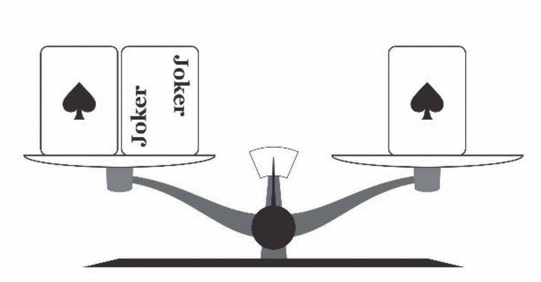

図9 ♠1⊕J=♠1

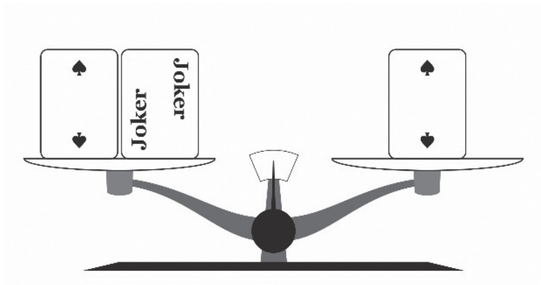

図10 ♠2⊕J=♠2

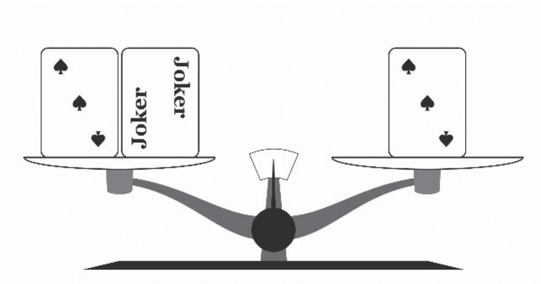

図11 ♠3⊕J=♠3

・
・
・

注意4

(1) 系1は全ての自然数n ∈ ℕに対して、n＋0＝nを意味している。

(2) この段階で自然数に相当するスペードのカード♠1、♠2、♠3、…、♠n、…　と0に相当するJが導入された。

(3) J ≠♠n が全てのn ∈ ℕに対して成り立つ。

ここで、つぎのことが成り立つ。

定理2　{♠1、♠2、♠3、…、♠n、…、とJ}は条件１～３を満たす。

また、次の重要な性質が成り立つ。

定理3　[J]⊕[J]＝[J]　が成り立つ。

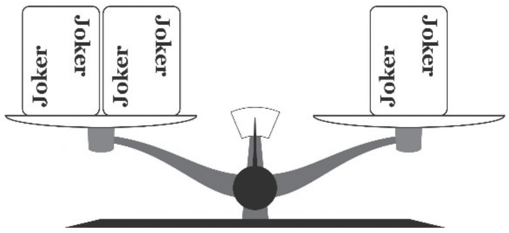

図12 [J]⊕[J]＝[J]

証明

　これを証明するためには、定義1及び定理1の系1より、

[♠1]⊕([J]⊕[J])＝[♠1]を示すと十分である。

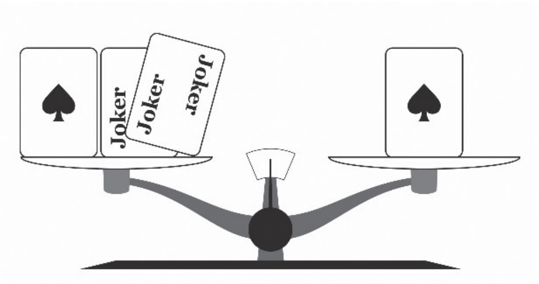

図13 [♠1]⊕[J]⊕[J]＝[♠1]

　天秤の左の皿は

[♠1]⊕([J]⊕[J])＝

([♠1]⊕[J])⊕[J]＝　(∵定理2)

[♠1]⊕[J]＝　(∵定義1)

[♠1]＝　(∵定義1)

　これは天秤の右の皿を意味しているので定理3は証明された。

§3 負の整数 [♥n]の導入（ハート）(n∈ℕ)

　§ 1の段階では注意2より、[♠1]、[♠2]、[♠3]、・・と、[J]とが在り、

A⊕(　　)＝Bとなる(　　)が存在する必要十分条件は　A≦Bである。

　従ってこれ以降は次の状況を考察する。

[♠1]⊕[?]＝[J]　・・・(*)

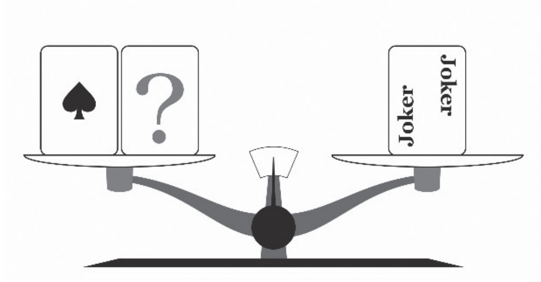

図14 [♠1]⊕[?]＝[J]

　これは方程式1+x=0を解くことである。

或いは

[♠5]⊕[?]＝[♠2]　・・・(**)

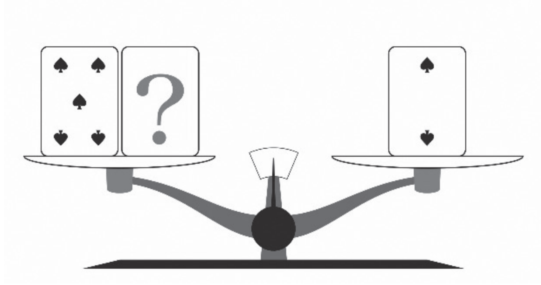

図15 [♠5]⊕[?]＝[♠2]

　これは方程式5+x=2を解くことである。

ルール1に従って、左の皿に何かを載せてバランスを取る方法が§ 1の段階では存在しない。

　即ち、[♠1]、[♠2]、[♠3]、・・・と[J]のどれも上の(*)、(**)の[?]としては成り立たない。

　そこで、(*)の場合には左の皿の[J]に適応する新しいカード[♥1]（ハートの1）を導入する。即ち、

定義2 [♥1]を次の性質を満たすカードと定義する：

　　　[♠1]⊕[♥1]＝[J]

即ち、

[♠1]が載っている左の皿に[♥1]を加えると[J]が載っている右の皿とで天秤ばかりがバランスを保つ。

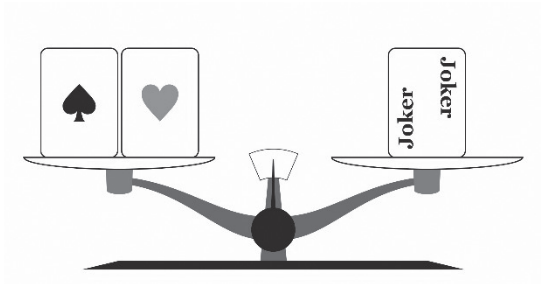

図16 [♠1]⊕[♥1]＝[J]

　この[♥1]が、定理1と同様に、「左の皿に[♠2]、右の皿に[J]」の場合にも成り立つのか、即ち[♠2]⊕[♥1]＝[J]が成り立つのか。しかしながら成り立たない。

実際、

定理4　♠2⊕♥1≠J である。

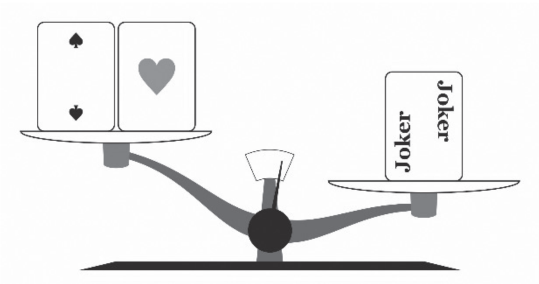

図17 ♠2⊕♥1≠J

証明

仮に♠2⊕♥1＝J とする。

左の皿は

♠2⊕♥1 ＝

(♠1⊕♠1) ⊕ ♥1＝（∵条件1)

♠1 ⊕ (♠1⊕♥1)＝（∵条件2)

♠1⊕J ＝　　（∵定義2)

♠1＝　（∵定義１）

ここで、♠1≠J より、定理4が示された。

定義3　各n ∈ ℕに対して♥nを次の性質を満たすカードと定義する：

♠n⊕♥n＝J

即ち、♠nが載っている左の皿に♥nを加えると、J が載っている右の皿とはバランスを保つ。

注意5　♥1は-1を、♥2は-2を、♥3 は-3 、・・を表している。従って、次のことを示す必要がある。

定理5　各自然数m、nに対して、次が成り立つ。
♥m⊕♥n＝♥m+n

証明

（１）　m＝2、n＝3の場合に成り立つことを示す。

（１）♥2⊕♥3＝♥2+3　(＝♥5)であるためには、

♥5 のカードの定義を考えると

♠5 ⊕ (♥2⊕♥3)＝J

になればよい。

そこで、左の皿：

♠5⊕（♥2⊕♥3)＝

(♠2⊕♠3) ⊕ (♥2⊕♥3)＝（∵条件1)

(♠2⊕♥2⊕ (♠3⊕♥3)＝

J⊕J ＝　（∵定義3)

J＝（∵定理3)

以上より、♥2⊕♥3＝♥5 が証明された。

注意6

定理5は自然数m、nに対して、

(−m) ＋ (−n) ＝−（m+n）を意味している。

例えば、

(−2) ＋ (−3) ＝−(2+3) (=−5)

を意味している。

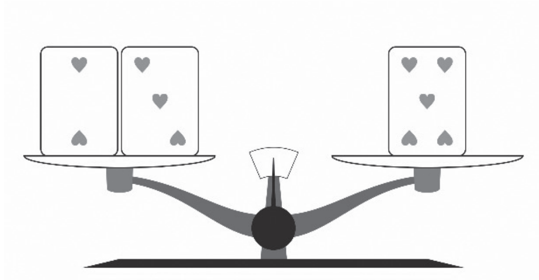

図18 ♥2⊕♥3＝♥5

定理6　各n ∈ ℕに対して、次が成り立つ。
♥n⊕J＝♥n

証明　n=3の場合を証明する。

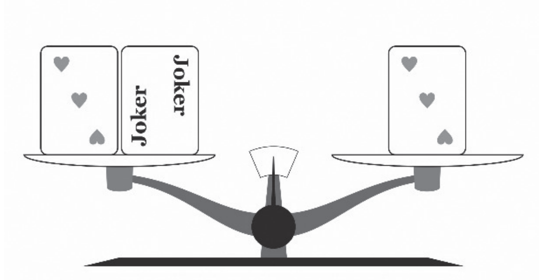

図19 ♥3⊕J＝♥3

♥3⊕J ＝♥3を示すには

♥3⊕J が♥3の定義2の性質を満たすこと、即ち、

♠3 ⊕ (♥3⊕J)＝J であればよい。

ここで、左の皿は

♠3⊕ (♥3⊕J)＝

(♥3⊕♠3) ⊕J ＝（∵条件2)

J⊕J ＝（∵定義3)

J＝　（∵定理3)

従って、

♥3⊕J＝♥3が示された。

注意7 (1) これはすべての負の整数nに対して、n+0=n を示している、言い換えると、すべての自然数nに対して、(−n) +0=−n　を示している。

(2) この段階で、自然数1、2、3、…に相当するスペードのカード♠1、♠2、♠3、…、♠n、…、と0に相当する J 、負の整数 -1、-2、-3、…　に相当する

ハートのカード[♥1]、[♥2]、[♥3]、…が導入され、次のことが成り立つことが証明される。

> 定理7　集合 {[♠1]、[♠2]、[♠3]、…、[J]、[♥1]、[♥2]、[♥3]、…} は条件1 ～ 3を満たす。

§4 [♣1] の導入（クローバー）

§ 2で、カード[♥1]の導入した目的を思い出そう。
（i）「[♠1]⊕[?]＝[J]」の場合、
或いは、カード[♥2]について
（ii）「[♠2]⊕[?]＝[J]」の場合、
ルール１に従って、上記（i）、（ii）において、左の皿の[?]に何かのカードを載せてバランスを保つ方法が {[♠1]、[♠2]、[♠3]、…、[J]} の中には無かった。そこで、（i）に関しては新しいカード[♥1]、（ii）に関しては[♥2]、… 等のハートのカードが導入された。

すると、上の（i）で、[♠1]の代わりに
[♥1]、或いは上の（ii）で[♠2]の代わりに
[♥2]などの場合も考える必要がある。即ち、
（i）「[♥1]⊕[?]＝[J]」の場合、

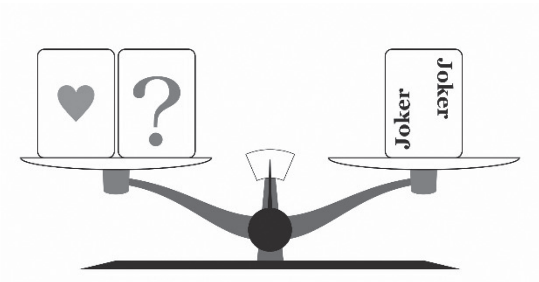

図20 [♥1]⊕[?]＝[J]

或いは、
（ii）「[♥2]⊕[?]＝[J]」の場合、

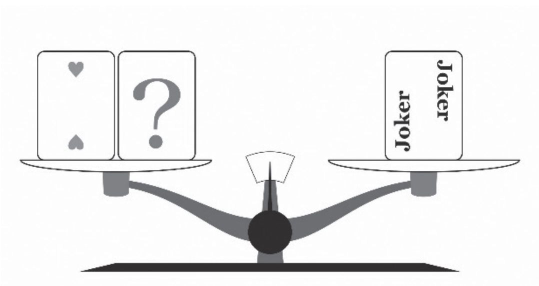

図21 [♥2]⊕[?]＝[J]

をそれぞれ考えることが必要である。

ルール１に従って、上記（i）或いは（ii）で左の皿に何かのカードを載せてバランスを保つ方法が{[♠1]、[♠2]、[♠3]、…、[J]、[♥1]、[♥2]、[♥3]、…}には無いように思える。

そこで:

定義4　各n∈ℕに対して、次の性質を満たすカード[♣n]を定義する：
[♥n]⊕[♣n]＝[J]
すなわち、[♥n]が載っている左の皿に[♣n]を加えると右の皿[J]とはバランスを保つカード[♣n]を導入する。

例えばn=2の場合：
[♥2]⊕[♣2]＝[J]　・・・（i）

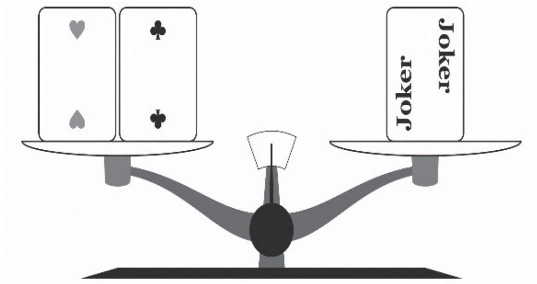

図22 [♥2]⊕[♣2]＝[J]

しかしながら、定義4より
[♠2]⊕[♥2]＝[J]　・・・（ii）

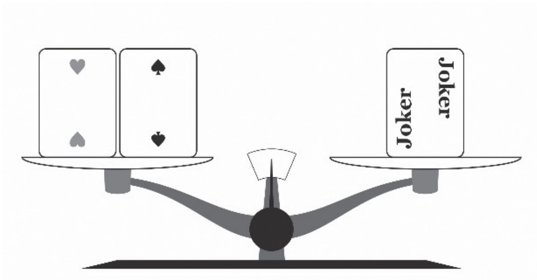

図23 [♠2]⊕[♥2]＝[J]

すると原則２と上記（i）、（ii）より
[♣2]＝[♠2]　・・・（iii）
この結果は実に重要な内容を含んでいる。
上記トランプで、スペードの2：[♠2]＝2、
ハートの2：[♥2]＝-2については
[♥2]＝-[♠2]＝-2　・・・（iv）
従って、「-」の記号は
[♣2]＝- [♥2]　・・・（v）
となる。
（iii）～（v）より
2＝-（- 2）
となる。

注意8　授業では「- n」の「-」を「マイナス」とは読まずに「横棒」と呼んでいる。理由は、「マイナス（マイナス　n）」はすでに「＝n」と知っているからである。本節は「-（- n）がなぜnになるか」が目的の一つだからである。

ここで、[♠1]＝1、[J]＝0、[♥1]＝-1と、現実的に記

号化されている。その意味では

$\boxed{\clubsuit 1} = -\boxed{\heartsuit 1} = -(-1)$　・・・①

を表している。

他方、「左の皿に$\boxed{\heartsuit 1}$、右の皿に$\boxed{\mathrm{J}}$の場合」にはバランスを保つのに新しいカードが不要である。なぜなら、左の皿に$\boxed{\spadesuit 1}$を載せるとバランスが保てる。これは、

$\boxed{\clubsuit 1} = \boxed{\spadesuit 1}$　・・・・②

を意味している。

上記①と②より、次のことが示された:

$\boxed{\spadesuit 2} = \boxed{\clubsuit 2}$、$\boxed{\spadesuit 3} = \boxed{\clubsuit 3}$　、…

、$\boxed{\spadesuit n} = \boxed{\clubsuit n}$　が示される。

従って以上より、以下の定理9が証明された。

> 定理9　自然数 n ∉ ℕ について、
>
> $-(-n) = n$
>
> が成り立つ。すなわち、$-(-1)=1$、
> $-(-2)=2$、$-(-3)=3$、… が成り立つ。

§３までのカードは$\boxed{\spadesuit 1}$、$\boxed{\spadesuit 2}$、$\boxed{\spadesuit 3}$、・・・、$\boxed{\mathrm{J}}$、$\boxed{\heartsuit 1}$、$\boxed{\heartsuit 2}$、$\boxed{\heartsuit 3}$、… である。現実の表現をすると、1、2、3、…、0、−1、−2、−3、… である、即ち、整数全体が定義された。

まとめ

小学校学習指導要領「第2章各教科第3節算数」の今回の改訂[7] について、算数科の学習における「数学的な見方・考え方」に関して中央教育審議会答申の中で，算数科の学習における『数学的な見方・考え方』については『事象を数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え，根拠を基に筋道を立てて 考え，統合的・発展的に考えること』であると考えられる。」[8] と記されている。

小学校教諭資格を取得するための「教科に関する科目」として、本学は「算数科概論」（90分×15コマ）を開講しているが、学生は理由よりも結論のみを知りたがる傾向が少なからず見受けられる。計算等も重要であるが、「数学的な見方・考え方」を敬遠する傾向がある。極端な問い「長方形の面積は何故、縦の長さ×横の長さか」を投げかけると、「それはルールだ、そのように決めたのだから理由はない」なる者も残念ながら居る。「なぜ？」「どうして？」との問いを多方面で持つことを今後も望みたい。その延長上で中学１年生で学ぶ「負の数」を題材にした。今後は演算（加法と減法）についても追って報告したい。

謝辞

本論に対し詳細な且つ丁寧な査読をして下さり、的確なアドバイスを数多く賜った査読者にお礼を申し上げたい。

また、本論では数多くの天秤ばかりのイラストが必要であった。その作成においては畿央大学の西尾正寛教授にサポート頂いた。ここに心より謝意を表したい。

参考文献

１）黒木　哲徳：「入門算数学、第二版」、日本評論社、2009

２）しょうがくさんすう１ねん：日本文教出版、2015

３）しょうがくさんすう１ねん指導書：日本文教出版、2015

４）吉田洋一：「零の発見」、岩波新書、1939

５）杉山吉茂：「初等科数学科教育学序説」、東洋館出版社、2008

６）秋山　仁監修：「秋山仁と算数・数学不思議探検隊」、森北出版、1994

７）小学校学習指導要領解説　算数編、文部科学省、平成29年6月

８）中央教育審議会：「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）」、第2部第2章3「算数、数学」、平成28年12月21日